CONCOURS EXTERNE 1985 D'INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES — DUREE : 3 heures — COEFFICIENT : 2

La rigueur des raisonnements et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation des copies.

PREMIERE PARTIE

1) a) - Montrer l'existence, pour tout x réel strictement positif, de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} . e^{-t}\, dt$. Calculer $\Gamma(1)$.

b) - Etablir, pour tout x réel strictement positif, la relation : $\Gamma(x+1) = x . \Gamma(x)$
En déduire l'image par Γ de tout entier naturel non nul.

2) Dans cette question on supposera n entier naturel non nul donné. Montrer que, quel que soit t, $t \in [0, n]$ on a : $(1+\frac{t}{n}) \leq e^{t/n}$; $(1-\frac{t}{n}) \leq e^{-t/n}$; $(1-\frac{t^2}{n}) \leq (1-\frac{t^2}{n^2})^n$.
En déduire que, $\forall t \in [0, n]$: $0 \leq e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2}{n} . e^{-t}$.

3) Soit n un entier naturel non nul, x un réel strictement positif et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $0 < t \leq n$: $f_n(t) = t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n$ et $n < t$: $f_n(t) = 0$

Montrer l'existence pour tout x réel strictement positif de $I_n(x) = \int_0^{\infty} f_n(t)\, dt$.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (\Gamma(x) - I_n(x)) = 0$.

4) a) n étant un entier donné et k étant un entier naturel inférieur à n, on pose :

$$A(k) = \int_0^1 u^{x+k-1} . (1-u)^{n-k}\, du \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+^*$$

Déterminer une relation liant $A(k)$ et $A(k+1)$. En déduire la valeur de $I_n(x)$. En conclure que $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(n!\, n^x \prod_{p=0}^{n} \frac{1}{x+p} \right)$.

b) - Montrer que la suite $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\mathcal{C}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \text{Log } n$ converge. Soit $\mathcal{C}$ sa limite.

c) - Etablir que pour tout x réel strictement positif on a

$$x\, e^{\mathcal{C}x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[(1+\frac{x}{n}) e^{-x/n} \right] = \frac{1}{\Gamma(x)}$$

DEUXIEME PARTIE

1) a) - Montrer que si f est application de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable et de dérivée continue) définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\, dt = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

b) - Montrer que l'application α définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$t = 0$: $\alpha(0) = 0$

$0 < t \leq \frac{\pi}{2}$: $\alpha(t) = \frac{\sin^2 at}{\sin t}$, a réel fixé $0 < a < 1$

est de classe C^1

c) - Soient p un entier naturel et a un réel de l'intervalle ouvert $]0,1[$.

on pose $\theta_p(a) = \int_0^{\pi/2} (\sin(2p+1)t)\, \alpha(t)\, dt$.

Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \theta_p(a) = 0$, que $\theta_p(a) - \theta_{p-1}(a) = \dfrac{(-1)^p a \sin(a\pi)}{2(p^2 - a^2)}$

pour $p \geq 1$, et que $\theta_0(a) = \pi/4 - \sin(a\pi)/4a$

2) a) - Soient $u(a) = \int_0^1 \dfrac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$ et $v(a) = \int_0^1 \dfrac{t^{-a}}{1+t}\, dt$, où a est un réel de l'intervalle ouvert $]0,1[$. Montrer que $u(a)$ et $v(a)$ existent et que

$$u(a) + v(a) = \int_0^{+\infty} [t^{a-1}/(1+t)]\, dt .$$

b) - Pour $p \in \mathbb{N}$ on note u_p et v_p les applications définies sur $]0,1[$ par

$$u_p(a) = \sum_{k=0}^{p} \int_0^1 (-1)^k t^{k+a-1}\, dt \quad \text{quel que soit } p$$

$$v_0(a) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(a) = \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 (-1)^{k+1} t^{k-a-1}\, dt \quad \text{pour } p \geq 1 .$$

Montrer que $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 t^{a-1} R_n^1(t)\, dt = 0$ et que $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 t^{-a} R_n^2(t)\, dt = 0$

où $R_n^1(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k t^k$ et $R_n^2(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} t^{k-1}$.

En déduire que les suites $(u_p(a))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(v_p(a))_{p \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $u(a)$ et $v(a)$. (On rappelle le développement en série entière de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$ dont le rayon de convergence est égal à 1: $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$)

c) - On appelle w_p l'application définie sur $]0,1[$ par

$$w_p(a) = u_p(a) + v_p(a) + 4\,\frac{\theta_p(a)}{\sin a\pi}$$

(θ_p est l'application définie en 1) c))

Pour $p \geq 1$ calculer $w_p(a) - w_{p-1}(a)$. Montrer que $w_p(a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$

En déduire la valeur de $u(a) + v(a)$.

3) Soit r un réel de l'intervalle $]0,1[$. On considère l'application bijective $\mathcal{D}$ définie par $\mathcal{D} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $(x,y) \longmapsto (u,v) = (x+y, \dfrac{y}{x})$

Montrer que $\mathcal{D}(S) \subset Q$ et $\mathcal{D}^{-1}(P) \subset S$ sachant que

$$P = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \,;\, u \in [r + \sqrt{r}\,,\, \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{\sqrt{r}}\,],\, v \in [\sqrt{r}\,,\, \tfrac{1}{\sqrt{r}}\,]\}$$

$$Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \,;\, u \in [2r\,,\, \tfrac{2}{r}\,],\, v \in [r^2\,,\, r^{-2}]\}$$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \,;\, x \in [r\,,\, \tfrac{1}{r}\,],\, y \in [r\,,\, \tfrac{1}{r}\,]\}$$

En déduire que si a est un réel de l'intervalle $]0,1[$ alors

$$\iint_P e^{-u} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, du\, dv \leq \iint_S x^{-a} y^{a-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \leq \iint_Q e^{-u} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, du\, dv$$

et $$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$